УДК. 550.831

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЯХ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТНЫХ КОНТАКТОВ

Дубовенко Юрий Иванович
Институт геофизики НАНУ, Киев
email: nemishayeve@ukr.net

Аннотация. Указан новый способ линеаризации нелинейной задачи гравиметрии для определения контакта. Определено, что известные аналитические конструкции для определения плотностных контактов являются его частными случаями. Указан ряд поправок для последовательного итерационного уточнения аналитических аппроксимаций контакта. Даны оценки меры уточнения контактов в сравнении с известными.

Ключевые слова: гравиметрия, контактная задача, аналитическая аппроксимация, плотностной контакт, модель контакта, итерационная поправка, класс Нумерова.

Вступ. В процессе становления новой парадигмы в теории интерпретации потенциальных полей [5] актуальна разработка нового математического аппарата для моделирования потенциальных геофизических полей, адекватного современной геофизической практике. Об адекватных требованиях к новому математическому диалекту геофизического моделирования и ключевой роли аналитических аппроксимаций геологической среды и геофизических полей много сказано в работах Страхова, например в [6]. Пополняя имеющиеся наработки в этой области, предлагаем новые аналитические аппроксимации для горизонтально-слоистой геологической среды. Они исследованы в рамках подкласса известного класса контактных поверхностей Страхова [3].

О постановке задачи. Решение $\zeta(x)$ *нелинейной* обратной задачи потенциала для контактной границы на классе Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ границ $\zeta(x)$ раздела однородных сред исследовано ещё в [7]. С высокой точностью его можно заменить на *линейное* уравнение, которое описывает аналитическое продолжение вертикальной составляющей напряжённости поля $u(x)$ силы тяжести в сторону тяготеющих масс на *среднюю глубину* $h=\zeta(x)$ [3]:

$$u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi=\zeta(x)$$

$$\approx\zeta(x;h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi)-h\right]d\xi \qquad (1)$$

Анализируя физическую суть процедуры (1) при ограничениях, свойственных классу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, после ряда преобразований получаем линеаризованное приближение

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi\,. \qquad (2)$$

Выражение (2) приближает решение задачи с точностью до квадрата разницы значений поля $h^{-2}\left(h^{+}-h^{-}\right)^2$ – на уровнях $y=0$ й $y=-h$. Но это выражение *не позволяет* определить поле $u(x,h)$, просто продлив $u(x)$ на уровень $y=h>0$. Ведь прямая $y=h$ рассекает тяготеющие массы на две части, и одна из частей при $\zeta(x)\le h$ будет *ниже*

уровня $y = h$. Вследствие этого, функция $u(x, y)$ при $y < h$ – негармоническая.

О решении задачи. Найти приближение $\zeta(x,h)$ можно не по формуле (2), а из предела последовательности $\{\zeta_n(x,h)\}$ решений, полученных из итераций способа Андреева

$$\zeta_{n+1}(x,h) = \zeta_n(x,h) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,x)d\xi + v(x),$$
$$\zeta_0(x,h) \equiv v(x) = u(x) - h,\ n = 0,\infty \qquad (3)$$

с последующей регуляризацией по Лаврентьеву (что достаточно для первого приближения). Доказано [7], что в классе $Nu^{(1,\alpha)}(1,\text{Ï}\ )$ решение нелинейной контактной задачи $\zeta(x)$ с точностью $h^{-2}(h^+ - h^-)^2$ при $h \to \infty$ получается из линеаризованного выражения

$$\zeta^{(n)}(x,h) = \zeta(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi,x)d\xi\,. \qquad (4)$$

Из этой формулы, при $n = 0,1,2$ как частные случаи, получаем известные аналитические формулы Нумерова [2], Хьюза [8] і Страхова [4], где $\Delta u(\xi) = u(\xi,0) - u(x,0)$:

$$\zeta^{(0)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi)d\xi, \qquad (5)$$

$$\zeta^{(1)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2} - \frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi\,, \qquad (6)$$

$$\zeta^{(2)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2} - 4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2} + \frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi\,, \qquad (7)$$

При этом формулы (4) и (6), (7) при $n \geq 3$ неэффективны для получения приближений контакта – через нарастание с номером итерации погрешностей округлений, особенно при вычислениях в окрестности точки $\xi = x$. Но подобный эффект прогрессии погрешностей не свойственный выражению (5).

Во избежание нежелательного накопления погрешностей идём в обход – ядра интегралов суммируем с разными знаками в направлении возрастания биномиальных коэффициентов. Практика вычислений на простых численных моделях показала, что суммирование элементарных дробей в ядрах конструкций с индексами $n > 0$ по схеме (4) даёт положительные ядра преобразований только при $n = 1,2,3$, а при $n = 4$ – уже отрицательные, что указывает на расходимость соответствующих интегральных квадратур.

Итак, по результатам численного моделирования определено, что для практики вычислений приближений (4) контакта $\zeta^{(n)}(x,h)$ достаточно, взяв “нулевым приближением” выражение (5), ограничиться одной из формул:

$$\zeta^{(1)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\cdot\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi\,, \qquad (8)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2++29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi\,.$$

Выбор детальности определения приближения зависит от характера исходного

поля $u(x)$ и масштаба построений (меры задачи: локальная либо региональная). Отметим особо справедливость указанных выше конструкций только для областей малой меры (≤ 100 км^2) с несложной геометрией.

Уточнение модели контакта. Приближение (4) $\zeta^{(n)}(x,h)$ можно существенно уточнить с помощью ряда поправок, каждая их которых есть аналитической аппроксимацией искомого контакта с различной мерой детальности на классе $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ допустимых искомых решений.

Например, поправка типа $\zeta_1^{(n)}(x,h) = \zeta^{(n)}(x,h) + \Delta\zeta(x,h)$, где

$$\Delta\zeta(x,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi\,, \tag{9}$$

повысит точность приближений до $h^{-3}\omega^3(\xi)$. Но численное моделирование показало, что в условиях слабоградиентного поля достаточно использовать поправку попроще

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h) = u(\xi_0)\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y}\,, \tag{10}$$

где $u(\xi_0)$ – некое “среднее” (осреднённое фильтрацией) значение поля на поверхности наблюдений.

Другая поправка $\zeta_1^{(k)}(x,h) = \sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2 + \Delta\zeta(x)}$, $k = 0,1,2,3...$, для уточнений приближения $\zeta^{(n)}(x,h)$ контакта получается из решения линейного интегрального уравнения 1-го рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi = v(x),$$

$$v(x) = u(x) - \zeta^{(k)}(x,h) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi\,, \tag{11}$$

повышая точность приближений $\zeta^{(n)}(x,h)$ до меры $\Delta\zeta_0^2\left(h^+\right)^{-3}$, $\zeta_0 = \max\limits_x\left|\Delta\zeta(x)\right|$.

Поправку (11) можно обобщить в виде конструкции $\zeta_{n+1}(x) = \zeta_n(x) + \Delta\zeta_n(x)$, где $\Delta\zeta_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$ получена как предел последовательных итераций вида:

$$\zeta_0(x) = \zeta^{(k)}(x,h),\ k = 0,1,2,3...,\ h^- \leq h \leq h^+,$$

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x) = u(x) - \zeta_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi + \Delta\zeta_n^{(m)}(x),\ m = \overline{0,\infty},\ \ n = \overline{0,\infty} \tag{12}$$

В итоге, получен ряд аналитических конструкций (8-12), применение которых к известным аппроксимационным изображениям контакта (4-7) на порядок повышает точность их определения. Доказано, что в классе $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ последовательные приближения (8-9) и (11-12) единственны и устойчивы (сходятся). Численно каждый способ сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с ядром типа Пуассона. Анализ практической точности этих конструкций в сравнении с известными методами [1] возможен после апробации на полевых данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гравиразведка.* Справочник геофизика / Под ред. *Е.А. Мудрецовой*. – Москва: Недра, 1981. – 400 с.
2. *Нумеров Б.В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. – 1930. – №21. – С. 569–574.
3. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1988. – №6. – С.30-33
4. *Страхов В.Н.* Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1976. – №3. – С. 54–66.
5. *Страхов В.Н.* Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.
6. *Страхов В.Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1.
7. *Чёрный А.В, Дубовенко Ю.И.* Уточнение некоторых способов приближенного определения контактной границы // Доклады НАН Украины. – 2002. – № 12. – С. 128–132. (укр.).
8. *Hughes D.* The analitic basis of gravity interpretation // Geophys. – 1942. – 7, № 2. – P. 169–178.

ON SOME ANALYTICAL APPROXIMATIONS FOR THE APPROXIMATE DEFINITION OF THE DENSITY CONTACTS

Dubovenko Yurii
Institute of Geophysics NASU, Kyiv
email: nemishayeve@ukr.net

Summary. A new technique of linearization for the gravimetry nonlinear problem for the contact definition is specified. It is defined that known analytical constructions for the definition of the density interfaces are its partial cases. A series of the corrections for the successive iteration refinement of the contact analytical approximations are stated. The estimations for the contact refinement measure are given in comparison with the known ones.

Key words: gravimetry, contact problem, analytical approximation, density interface, model of contact, iterative correction, Numerov's class.